JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 19, 325–331 (1977)

Über die Breite von Klassen holomorpher periodischer Funktionen

WILHELM FORST

Fachbereich Mathematik der Universität, D-74 Tübingen, West Germany

Communicated by G. G. Lorentz

Received October 20, 1975

1. EINLEITUNG

Sei $C_{2\pi}$ der Raum der stetigen 2π-periodischen Funktionen, normiert mittels der Maximumnorm, und H_β ($\beta > 0$) die Klasse der reellwertigen 2π-periodischen im Streifen $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ holomorphen Funktionen mit $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant 1$ für $z \in S_\beta$. Für $U \subseteq C_{2\pi}$ bezeichnet

$$\delta(H_\beta, U) = \sup_{f \in H_\beta} \inf_{g \in U} |f - g| \tag{1}$$

den Approximationsgrad von H_β bezüglich U und

$$d_n(H_\beta) = \inf\{\delta(H_\beta, U) \mid U \text{ Unterraum von } C_{2\pi} \text{ mit } \dim U \leqslant n\} \tag{2}$$

die n-Breite (englisch: width) von H_β in $C_{2\pi}$. Tihomirov hat in zwei Arbeiten (vgl. [7, 8]) die n-Breiten von H_β explizit bestimmt. Die Ergebnisse aus [8] sind jedoch falsch, und in [7, Section 3] ist im Beweis des Lemmas eine nichttriviale Lücke zu schließen. Eine genaue Analyse der Beweise in [7, 8, 9] ermöglicht eine Korrektur der Ungenauigkeiten; darüber hinaus kann auf die Benutzung des Satzes von Borsuk verzichtet und dadurch der Beweis elementar durchgeführt werden.

2. BESTIMMUNG DER n-BREITEN

Von großer Wichtigkeit für das Folgende sind die Untersuchungen von Achieser (vgl. [6, p. 196 ff.; 7, Section 4]), die

$$\delta(H_\beta, P_{n-1}) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\operatorname{ch}((2m+1)n\beta)} =: \Delta_{n-1}(\beta) \tag{3}$$

für den Approximationsgrad von H_β bezüglich des Raumes P_{n-1} der tri-

ISSN 0021-9045

gonometrischen Polynome vom Grade $\leqslant n-1$ ergeben. Mit Hilfe des Kernes

$$K_\beta(z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kz)}{\operatorname{ch}(k\beta)} \qquad (z \in S_\beta) \tag{4}$$

erhält man genauer per

$$f_{n,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\beta(t-z) \operatorname{sign}(\cos nt)\, dt \qquad (z \in S_\beta)$$

eine Funktion $f_{n,\beta} \in H_\beta$ mit

$$f_{n,\beta}(x_k) = (-1)^k \Delta_{n-1}(\beta)$$

und

$$f_{n,\beta}(\xi_k) = 0$$

an den Stellen $x_k = k \cdot (\pi/n)$, $\xi_k = x_k + \pi/2n$ $(k \in \mathbb{Z})$ sowie

$$|f_{n,\beta}| = \Delta_{n-1}(\beta); \tag{5}$$

$f_{n,\beta}$ hat also in P_{n-1} die Nullfunktion als Proximum und ist in dem Sinne extremales Element von H_β, daß

$$\delta(f_{n,\beta}, P_{n-1}) = \delta(H_\beta, P_{n-1})$$

gilt.

Im Weiteren benötigen wir für unsere Überlegungen ein Ergebnis von Mikhail [5], welches sich auch aus einem allgemeineren Resultat von Forst [2] ergibt; demzufolge spannen die geshifteten Funktionen $T_{-z_j}K_\beta$ $(j = 0,\ldots, 2m)$, $(T_{-z_j}K_\beta)(z) := K_\beta(z - z_j)$, für beliebige $z_0 < z_1 < \cdots < z_{2m} < z_0 + 2\pi$ einen Haarschen Raum auf. Dies kann man auch so deuten, daß K_β im Sinne von Karlin [4, p. 455] ein strikt totalpositiver zyklischer Kern ist.

Lemma 1. *Es sei* $z_0 < z_1 < \cdots < z_{2m} < z_0 + 2\pi$: *dann ist* $\operatorname{span}\{T_{-z_j}K_\beta \mid j = 0,\ldots, 2m\}$ *ein Haarscher Raum über* $[0, 2\pi)$.

Der Vollständigkeit halber bringen wir den von Mikhail [5] angegebenen Beweis. Nach Achieser [1, p. 253] ist K_β eine elliptische Funktion der Ordnung 2 mit den primitiven Perioden 2π und $4i\beta$. Somit ist $f \in \operatorname{span}\{T_{-z_j}K_\beta \mid j = 0,\ldots, 2m\}, f \neq 0$, eine elliptische Funktion der Ordnung $\leqslant 2(2m+1)$. Mittels der Funktionalgleichung $K_\beta(z + 2i\beta) = -K_\beta(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ folgt dann, daß f im Intervall $[0, 2\pi)$ höchstens $2m + 1$ Nullstellen hat. Aus Periodizitätsgründen ergibt sich schießlich sogar, daß f wie behauptet in $[0, 2\pi)$ höchstens $2m$ Nullstellen haben kann.

Als Nächstes untersuchen wir die durch

$$g_j(z) = 1/2\pi \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} K_\beta(t - z) \operatorname{sign}(\cos nt)\, dt \qquad (z \in S_\beta)$$

definierten Funktionen $g_j \in H_\beta$ $(j = 0,\ldots, 2n-1)$; diese sind linear unabhängig. Der von ihnen aufgespannte $2n$-dimensionale Unterraum werde mit $U_{n,\beta}$ bezeichnet. Es gilt dann

LEMMA 2. *Für alle* $k, 0 \leqslant k < 2n$, *erfüllt der* $(2n-1)$-*dimensionale Unterraum* $\operatorname{span}\{g_j \mid 0 \leqslant j < 2n, j \neq k\}$ *in* $[0, 2\pi)$ *die Haarsche Bedingung.*

Lemma 2 ergibt sich ebenfalls als Spezialfall aus [2]. Unabhängig davon kann man einen einfachen Beweis angeben, der mit der durch Lemma 1 garantierten totalen Positivität von K_β auskommt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit genügt es, den Fall $k = 2n - 1$ zu betrachten. Für beliebige $u_0 < u_1 < \cdots < u_{2n-2} < u_0 + 2\pi$ gilt dann nach dem Satz von Fubini

$$\det(g_j(u_k) \mid 0 \leqslant j, k \leqslant 2n-2)$$
$$= \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n-1}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \cdots \int_{\xi_{2n-2}}^{\xi_{2n-1}} \det(K_\beta(t_j - u_k) \mid 0 \leqslant j, k \leqslant 2n-2)\, dt_0 \cdots dt_{2n-2}.$$

Aus Lemma 1 folgt die Positivität des Integranden, daraus $\det(g_j(u_k) \mid 0 \leqslant j, k \leqslant 2n-2) \neq 0$ und so schließlich die Gültigkeit der Haarschen Bedingung.

LEMMA 3. *Für* $g \in U_{n,\beta}$ *mit* $|g(x_j)| \leqslant |f_{n,\beta}|$ $(j = 0,\ldots, 2n-1)$ *gilt* $g \in H_\beta$.

Wir nehmen an, es existiere ein $g \in U_{n,\beta} \backslash H_\beta$ mit $|g(x_j)| \leqslant |f_{n,\beta}|$ $(j = 0,\ldots, 2n-1)$. Dann gilt $1 < \sup_{z \in S_\beta} |\operatorname{Re} g(z)| < \infty$; hat g die Darstellung

$$g(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_j g_j(z),$$

so gibt es mindestens ein α_j mit $|\alpha_j| > 1$. Man wähle nun k so, daß $|\alpha_k|$ maximal ist, und bilde $f := f_{n,\beta} - (1/\alpha_k)\, g$. f hat dann mindestens $2n$ Nullstellen in $[0, 2\pi)$. Wegen

$$f_{n,\beta} = \sum_{j=0}^{2n-1} g_j$$

ergibt sich andererseits mit

$$f = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2n-1} \left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_k}\right) g_j \neq 0$$

ein Widerspruch zu Lemma 2.

LEMMA 4. *Zu $y_0, \ldots, y_{2n-1} \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $g \in U_{n,\beta}$ mit $g(x_k) = y_k$ $(k = 0, \ldots, 2n-1)$.*

Für $g \in U_{n,\beta}$ mit $g(x_k) = 0$ $(k = 0, \ldots, 2n-1)$ gilt nach Lemma 3 $\alpha g \in H_\beta$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$; dies zieht $\operatorname{Re} g(z) = 0$ für $z \in S_\beta$ und damit $g = 0$ nach sich.

LEMMA 5. *In $\mathbb{R}^m$ seien ein linearer Unterraum V mit $\dim V < m$ und eine Teilmenge F gegeben. Es existiere ein $\epsilon > 0$ mit $\{y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid |y_j| = \epsilon\ (j = 1, \ldots, m)\} \subseteq F$; dann gilt bezüglich der Maximumnorm $\delta(F, V) \geqslant \epsilon$.*

Wegen $\dim V < m$ existiert $l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in (\mathbb{R}^m)^*$ mit

$$|l| = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| = 1$$

und

$$l(g) = 0 \qquad \text{für alle } g \in V.$$

$f \in \mathbb{R}^m$ mit

$$f_k := \epsilon \cdot \begin{cases} \operatorname{sign} \lambda_k, & \text{falls} \quad \lambda_k \neq 0, \\ 1, & \text{sonst}, \end{cases}$$

gehört nach Voraussetzung zu F. Zusammen mit

$$|f - g| \geqslant l(f - g) = l(f) = \epsilon \qquad \text{für alle } g \in V$$

ergibt dies die Behauptung.

LEMMA 6. *Sei V ein $2n$-dimensionaler Unterraum von $C_{2\pi}$. Dann gilt $\delta(H_\beta, V) \geqslant |f_{n,\beta}|$.*

Es sei $V = \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_{2n-1}\}$. Betrachtet man dann $D(t) := \det(v_i(x_k + t))$, so gilt $D(\pi/n) = -D(0)$; somit existiert $\tau \in [0, \pi/n)$ mit $D(\tau) = 0$. Mittels Shiften um τ erhalten wir aus V den Unterraum $W := \{T_\tau g \mid g \in V\}$, $(T_\tau g)(x) := g(x + \tau)$, mit den Basiselementen $w_i = T_\tau v_i$; dafür gilt $\det(w_i(x_k)) = 0$ und $\delta(H_\beta, W) = \delta(H_\beta, V)$. Für alle $y_0, \ldots, y_{2n-1} \in \mathbb{R}$ mit $|y_k| = |f_{n,\beta}|$ $(k = 0, \ldots, 2n-1)$ existiert nach Lemma 4 genau ein $g \in U_{n,\beta}$ mit $g(x_k) = y_k$ $(k = 0, \ldots, 2n-1)$; nach Lemma 3 gilt $g \in H_\beta$. Denken wir uns H_β und W

eingeschränkt auf $M = \{x_0, \ldots, x_{2n-1}\}$, so ist Lemma 5 anwendbar, und es folgt wie behauptet $\delta(H_\beta, V) = \delta(H_\beta, W) \geqslant \delta(H_{\beta|M}, W_{|M}) \geqslant |f_{n,\beta}|$.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich so der folgende

Satz 1. $d_{2n}(H_\beta) = d_{2n-1}(H_\beta) = \delta(H_\beta, P_{n-1}) = \Delta_{n-1}(\beta)$.

Nach Lemma 6 gilt nämlich $d_{2n}(H_\beta) \geqslant |f_{n,\beta}|$; mittels des Resultats $|f_{n,\beta}| = \delta(H_\beta, P_{n-1}) = \Delta_{n-1}(\beta)$ von Achieser erhält man ferner $|f_{n,\beta}| \geqslant d_{2n-1}(H_\beta)$. Über die triviale Ungleichung $d_{2n-1}(H_\beta) \geqslant d_{2n}(H_\beta)$ schließt sich dann der Kreis; in sämtlichen Ungleichungen muß daher das Gleichheitszeichen stehen.

3. Bestimmung der linearen n-Breiten

In Analogie zu (1) bzw. (2) bezeichne nun

$$\delta'(H_\beta, U) := \inf\{\sup_{f\in H_\beta} |f - Lf| \mid L: C_{2\pi} \to U \text{ linear, beschränkt}\}$$

den linearen Approximationsgrad von H_β bezüglich des linearen Unterraumes $U \subseteq C_{2\pi}$ und

$$d_n'(H_\beta) := \inf\{\delta'(H_\beta, U) \mid U \text{ Unterraum von } C_{2\pi} \text{ mit } \dim U \leqslant n\}$$

die lineare n-Breite von H_β in $C_{2\pi}$. Ferner nennen wir einen beschränkten linearen Operator $L: C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ vom Rang $\leqslant n$ n-extremal zu H_β, falls $d_n'(H_\beta) = \sup\{|f - Lf| \mid f \in H_\beta\}$ ist. Die Ergebnisse von Achieser (vgl. [3, p. 92; 7]) liefern nun $d_{2n-1}(H_\beta) = d'_{2n-1}(H_\beta)$. Genauer gilt für sogenannte Operatoren $L: C_{2\pi} \to P_{n-1}$ vom Faltungstyp, die sich in der Gestalt

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{|k|<n} \lambda_k e^{ik(x-t)} f(t)\, dt$$

mit geeigneten Faktoren $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ($|k| < n$) darstellen lassen, der folgende

Satz 2. Es existiert genau ein linearer Operator $L_{n,\beta}$ vom Faltungstyp mit $\sup_{f\in H_\beta} |f - L_{n,\beta} f| = \Delta_{n-1}(\beta)$. Ferner gilt $L_{n,\beta} \neq L_{n,\gamma}$ für $\beta \neq \gamma$.

Es ist eine offene Frage, ob es noch andere beschränkte lineare Operatoren $L: C_{2\pi} \to P_{n-1}$ gibt, die $(2n-1)$-extremal sind.

Folgerung 1. Es gibt keinen beschränkten linearen Operator $L: C_{2\pi} \to P_{n-1}$, der zu H_β und H_γ ($\beta \neq \gamma$) $(2n-1)$-extremal ist.

Sei $L: C_{2\pi} \to P_{n-1}$ ein beschränkter linearer Operator, der zu H_β und

H_γ $(\beta \neq \gamma)$ $(2n-1)$-extremal ist. Dann erhalten wir durch die Berman-Mittelung

$$\bar{L} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{-x} L T_x \, dx$$

einen beschränkten linearen Operator $\bar{L}$ vom Faltungstyp, der auch $(2n-1)$-extremal zu H_β und H_γ ist. Mit $\bar{L} = L_{n,\beta} = L_{n,\gamma}$ ergibt sich so ein Widerspruch zu Satz 2.

Folgerung 2. $d'_{2n-1}(H_\beta) = d'_{2n}(H_\beta) = \delta'(H_\beta\,, P_{n-1}) = \Delta_{n-1}(\beta)$.

Satz 2 ergab die Existenz eines $2n$-extremalen Operators. Mittels der Überlegungen von Mikhail [5] zeigen wir nun, daß sogar ein $2n$-extremaler Interpolationsoperator existiert. Wir betrachten dazu den $2n$-dimensionalen Unterraum

$$V_{n,\beta} := \operatorname{span}\{T_{-x_k} K_\beta \mid k = 0,\dots, 2n-1\}$$

von $C_{2\pi}$. An den Stellen $x_0\,,\dots, x_{2n-1}$ ist in $V_{n,\beta}$ eindeutige Interpolation möglich. Bezeichnen wir mit $l_0\,,\dots, l_{2n-1}$ die Lagrange-Basis dieses Raumes, so kann man durch

$$\hat{L}_{n,\beta} f := \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_k)\, l_k$$

einen Operator $\hat{L}_{n,\beta} : C_{2\pi} \to V_{n,\beta}$ definieren. Für $f \in H_\beta$ hat man die Integraldarstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\eta(t-z) \operatorname{Re} f(t+i\eta)\, dt \qquad (z \in S_\eta\,, 0 < \eta < \beta)$$

(vgl. [6, p. 197]), und so gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (\hat{L}_{n,\beta} f)(x)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(K_\eta(t-x) - \sum_{k=0}^{2n-1} l_k(x)\, K_\eta(t-x_k) \Big) \operatorname{Re} f(t+i\eta)\, dt.$$

Durch Abschätzen und Grenzübergang $\eta \to \beta$ erhält man daraus

$$| f(x) - (\hat{L}_{n,\beta} f)(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| K_\beta(t-x) - \sum_{k=0}^{2n-1} l_k(x)\, K_\beta(t-x_k) \Big| \, dt. \qquad (6)$$

Wir betrachten nun die Fehlerfunktion

$$\epsilon(x,t) := K_\beta(t-x) - \sum_{k=0}^{2n-1} l_k(x)\, K_\beta(t-x_k).$$

Für festes j, $0 \leqslant j < 2n$, gilt $\epsilon(\cdot, x_j) \in V_{n,\beta}$ und $\epsilon(x_l, x_j) = 0$ $(l = 0,..., 2n-1)$. Dies ergibt $\epsilon(\cdot, x_j) = 0$ wegen der eindeutigen Interpolierbarkeit in $V_{n,\beta}$. Daraus folgt mit geeignetem $\sigma(x) = \pm 1$

$$| \epsilon(x, t)| = \sigma(x)\, \epsilon(x, t) \operatorname{sign}(\sin nt). \tag{7}$$

Falls nämlich x mit einem der Knoten x_k $(k \in \mathbb{Z})$ zusammenfällt, gilt dies trivialerweise wegen $\epsilon(x, \cdot) = 0$; sonst ist $\epsilon(x, \cdot) \neq 0$ und $\epsilon(x, x_l) = 0$ $(l = 0,..., 2n - 1)$. Nach Lemma 1 hat dann $\epsilon(x, \cdot)$ keine weiteren Nullstellen in $[0, 2\pi)$; außerdem hat $\epsilon(x, \cdot)$ an den Stellen $x_0, ..., x_{2n-1}$ Vorzeichenwechsel. Somit gilt (7) auch in diesem Falle, und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_\beta(t-x) - \sum_{k=0}^{2n-1} l_k(x)\, K_\beta(t-x_k) \right| dt \\ &\quad = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_\beta(t-x) \operatorname{sign}(\sin nt)\, dt \right| = \left| f_{n,\beta}\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) \right| \\ &\quad \leqslant \| f_{n,\beta} \| = \Delta_{n-1}(\beta). \end{aligned} \tag{8}$$

Aus (6), (8) und Lemma 6 folgt dann

$$\sup_{f \in H_\beta} \| f - \hat{L}_{n,\beta} f \| = \Delta_{n-1}(\beta),$$

d.h. der Interpolationsoperator $\hat{L}_{n,\beta}$ ist $2n$-extremal zu H_β.

Literatur

1. N. I. Achieser, "Vorlesungen über Approximationstheorie," Berlin, 1967.
2. W. Forst, Variationsmindernde Eigenschaften eines speziellen Kreinschen Kernes, *Math. Z.* **148** (1976), 67–70.
3. M. Golomb, Optimal and nearly-optimal linear approximations, *in* "Approximation of Functions" (H. L. Garabedian, Ed.), American Elsevier, London/New York, 1965.
4. S. Karlin, "Total Positivity I," Stanford Univer. Press, Calif., 1968.
5. M. Mikhail, "Optimale Interpolation holomorpher periodischer Funktionen," Dissertation, Tübingen, 1976.
6. A. Schönhage, "Approximationstheorie," de Gruyter, Berlin/New York, 1971.
7. V. M. Tihomirov, Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations, *Russian Math. Surveys* **15** No. 2 (1960), 75–111.
8. V. M. Tihomirov, On n-dimensional diameters of certain functional spaces, *Soviet Math. Dokl.* **1** (1960), 94–97.
9. V. M. Tihomirov, Best methods of approximation and interpolation of differentiable functions in the space C[-1,1], *Math. USSR-Sb.* **9** (1969), 275–289.